8. Präsenzübung zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(zu bearbeiten am Dienstag, 14.12.2010)

Aufgabe P13 *Freies Teilchen mit scharfem Impuls*

Die zeitabhängige Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Masse m kann bestimmt werden mittels

$$\psi(x,t) \;\equiv\; \langle x|\psi(t)\rangle \;=\; \int \mathrm{d}y\; \langle x|U(t)|y\rangle\langle y|\psi(0)\rangle \; .$$

Berechnen Sie auf drei Arten $\psi(x,t)$ für den Fall, dass das Teilchen für $t=0$ einen scharfen Impuls $p_0 = \hbar k_0$ hat, also

$$|\psi(0)\rangle \;=\; |p_0\rangle \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle x|\psi(0)\rangle \;=\; \langle x|p_0\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,\exp(\mathrm{i}k_0 x) \; .$$

(a) Entwickeln Sie $|\psi(t)\rangle$ nach den Eigenzuständen $|p\rangle$ des Hamilton-Operators $H = \frac{P^2}{2m}$ und verwenden Sie, dass

$$\langle p|\psi(t)\rangle \;=\; \exp\!\big(-\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}t\,E(p)\big)\,\langle p|\psi(0)\rangle \; .$$

Hinweise: $E(p) = ?$ $\quad \langle p|\psi(0)\rangle = \langle p|p_0\rangle = ?$ $\quad \int \mathrm{d}p\; f(p)\,\delta(p-p_0) = f(p_0)$.

(b) Der Propagator eines freien Teilchens in der Ortsdarstellung lautet

$$\langle x|U(t)|y\rangle \;=\; \sqrt{\tfrac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar t}}\;\exp\!\big(\tfrac{\mathrm{i}m(x-y)^2}{2\hbar t}\big) \; .$$

Hinweis: Im Exponenten quadratisch ergänzen! Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\,\mathrm{e}^{-\beta u^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$ für $\mathrm{Re}\beta \geq 0$.

(c) Benutzen Sie die alternative Darstellung

$$\langle x|U(t)|y\rangle \;=\; \delta(x-y)\;\exp\!\big(\tfrac{\mathrm{i}\hbar t}{2m}\partial_y^2\big) \; .$$

Erklärung: Dies folgt aus $U(t) = \langle x|\exp\!\big(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}t\,\frac{P^2}{2m}\big)|y\rangle$ und $\langle x|P|y\rangle = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\delta(x-y)\partial_y$.

Bleibt der Impuls scharf für $t > 0$?